SUITES 1

Ph DEPRESLE

29 juin 2015

Table des matières

1 Notion de suite

Définition 1. *Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n associe un réel.*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Une suite peut être définie seulement à partir du rang n_0.

1.1 Suite définie par une formule explicite

Définition 2. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;+\infty[$.*
On définit une suite associée à la fonction f en posant pour tout entier $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$.
u_n est l'image de l'entier n par la fonction f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n) = \dfrac{n}{n+1}$
Le terme initial est $u_0 = \dfrac{0}{0+1} = 0$.
Le terme u_1 vaut $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
Le terme u_2 vaut $\dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$.
....
Un algorithme permettant d'afficher les termes de u_0 à u_{10} est :

Pour i variant de 0 à 10
u prend la valeur $\dfrac{i}{i+1}$
afficher u
Fin Pour

On a par exemple, $u_{10} = \dfrac{10}{10+1}$ soit $u_{10} = \dfrac{10}{11}$

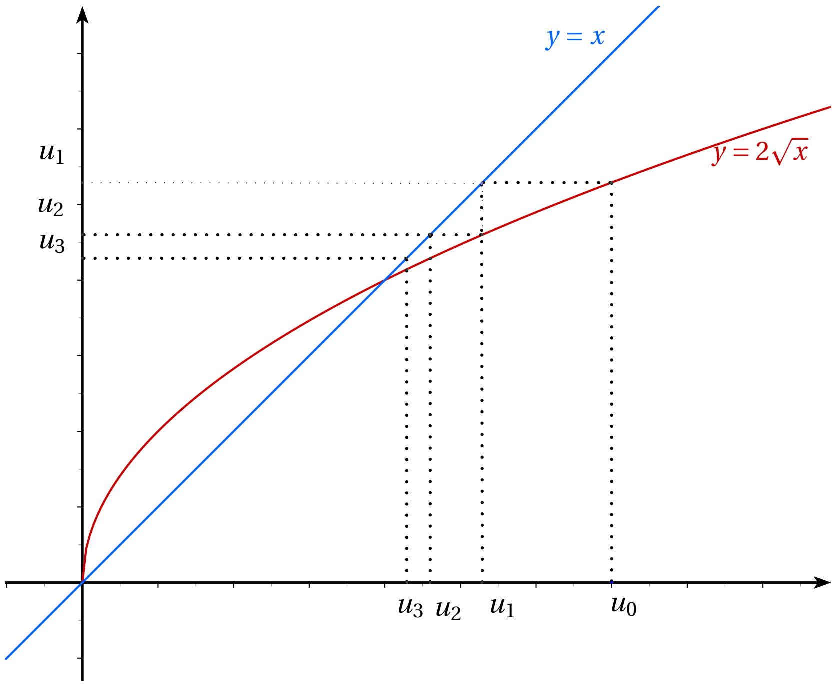
1.2 Suite définie par une relation de récurrence

Définition 3. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I (avec $f(I) \subset I$) et a un réel de I.*
On définit la suite (u_n) par :
• *le terme initial $u_0 = a$*
• *une relation permettant de calculer chaque terme de la suite à partir du précédent, appelée relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$;*

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

Ici $f(x) = 2\sqrt{x}$
La représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) est donnée ci-contre :
Un algorithme permettant d'afficher u_{50} est :

Initialisation :	Affecter à u la valeur 7.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à 50
|	u prend la valeur $2\sqrt{u}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u



2 Les suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 4. *On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n).

Exemple : La suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 3$. l'algorithme suivant permet de calculer le terme u_n.

Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à n
	u prend la valeur $u - \frac{1}{4}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

2.2 Expression de u_n en fonction de n

Théorème 1. *Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Alors :*
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$
Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$, $u_n = u_p + (n-p)r$

Théorème 2. *Soit (u_n) une suite définie, pour tout entier naturel n, par :*

$$u_n = an + b$$

Alors (u_n) est la suite arithmétique de terme initial $u_0 = b$ et de raison a.

2.3 Somme des n premiers entiers naturels

Théorème 3. *Pour tout entier naturel n non nul :* $1+2+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Un algorithme donnant la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0 est :

Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur u_0.
	Affecter à S la valeur 0.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à $n+1$
	S prend la valeur $S+u$
	u prend la valeur $u+r$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3 Les suites géométriques

3.1 Définition

Définition 5. *On dit qu'une suite* (u_n) *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que, pour tout entier naturel* n*, on a :*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q *est appelé raison de la suite géométrique* (u_n).

3.2 Expression de u_n en fonction de n

Théorème 4. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q*. Alors :*
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$
Pour tout entier naturel n *et pour tout entier naturel* p *tel que* $p \leqslant n$, $u_n = u_p q^{n-p}$

Théorème 5. *Soit* (u_n) *une suite définie, pour tout entier naturel* n*, par :*

$$u_n = ba^n$$

Alors (u_n) *est la suite géométrique de terme initial* $u_0 = b$ *et de raison* a.

3.3 Somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q

Calcul de $S_n = 1+q+q^2+.....+q^{n-1}+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ où q est un réel.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & .... & .... & + & q^{n-1} & + & q^n \\ qS_n & = & q & + & q^2 & + & .... & ... & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline (1-q)S_n & = & 1-q^{(n+1)} & & & & & & & & & \end{array}$$

donc :

- si $q=1$ alors $S_n = 1+1+1+...+1+1 = n+1$ car il y a $n+1$ fois le nombre 1.
- Si $q \neq 1$ alors

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

4 Axiome de récurrence

Axiome
Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour l'entier n supérieur ou égal à n_0 elle est vrai aussi pour l'entier $n+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.
Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n on utilise 3 étapes :

- **Initialisation** : On vérifie que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que pour un entier n quelconque la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.
  Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$.

Exemple : Démontrer que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n-1+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit P_n : "$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$"

- Pour $n=1$ la relation est vraie $\left(1 = \dfrac{1\times 2}{2}\right)$.$P_1$ est donc vraie.
- Soit $n \geqslant 1$, on suppose que pour cet entier n, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie, on a $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  On a alors :
  $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i = 1+2+3+n+(n+1) = (1+2+3+.......+n)+(n+1)$
  $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.
  Soit $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
  Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

5 QCM

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 1$ est :
   a. une suite géométrique
   b. une suite arithmétique
   c. ni arithmétique ni géométrique
2. La suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{(-2)^{3n}}{3^{n+1}}$ est :
   a. une suite géométrique
   b. une suite arithmétique
   c. ni arithmétique ni géométrique
3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + n + 3$.
   La valeur de u_4 est :
   a. $u_4 = 24$
   b. $u_4 = 7$
   c. $u_4 = 20$
4. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
   Soit $(v_n) = (n-1)^2$
   Alors :
   a. $u_4 = v_5$
   b. $u_5 = v_4$
   c. $u_4 = v_4$

Solution :

1. $u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 5.$
   $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$.
   Ces deux nombres sont distincts, la suite n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0} = 2$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{2}$.
   Ces deux nombres sont distincts, la suite ne peut pas être géométrique.
   Elle n'est ni arithmétique ni géométrique. La bonne réponse est c.
2. $(-2)^3 = -8$, donc $(-2)^{3n} = ((-2)^3)^n = (-8)^n$.
   $$v_n = \frac{(-2)^{3n}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \frac{(-8)^n}{3^n} = \frac{1}{3}\left(-\frac{8}{3}\right)^n$$
   (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et de raison $-\dfrac{8}{3}$.
   La bonne réponse est a.
3. $u_1 = u_0 + 0 + 3 = 2 + 3 = 5$
   $u_2 = u_1 + 1 + 3 = 5 + 4 = 9$
   $u_3 = u_2 + 2 + 3 = 9 + 5 = 14$
   $u_4 = u_3 + 3 + 3 = 14 + 6 = 20$
   La bonne réponse est c.

4. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$ et $v_1 = (1-1)^2 = 0$
   $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$ et $v_2 = (2-1)^2 = 1$
   $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$ et $v_3 = (3-1)^2 = 4$
   $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 1 = 16$ et $v_4 = (4-1)^2 = 9$
   $u_5 = u_4 + 2 \times 4 + 1 = 25$ et $v_5 = (5-1)^2 = 16$
   La bonne réponse est a.

6 EXERCICES : Les exercices de base

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$

et soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{u+2}{2u+1}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   (b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

(b) Que permet de calculer cet algorithme ?

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

Exercice 5

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}.$$

1. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 6

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer v_0.

   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (d) Exprimer v_n en fonction de n.

   (e) Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculer w_0.

   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

   (c) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

7 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

Exercice 1 Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$u_n = w_n$".

- $\mathscr{P}_0$ est vraie, car $u_0 = 0$ et $w_0 = 0$.
- Supposons que pour un entier n quelconque, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.
  Sous cette hypothèse :
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-w_n} = \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$
  Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 2 :

1. L'algorithme calcule et affiche u_1, u_2, u_3.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. (a) Pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}+1}$$
   $$v_{n+1} = \frac{u_n+2-2u_n-1}{u_n+2+u_n+1} = \frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)} = -\frac{1}{3}v_n.$$
   La suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   (b) $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{1}{3}$
   $$v_n = v_0\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

3. (a) Pour tout entier naturel n, $|v_n| = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Or $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $|v_n| < 1$.
   On a bien $v_n \neq 1$.

   (b) $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_n + 1 = u_n(1-v_n)$

   On a bien $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$

Exercice 3

1. (a) $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{9}{10}$.

   (b) Soit la proposition $\mathscr{P}_n : 0 < u_n < 1$.
   - $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un entier n.
     Sous cette hypothèse, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ est le quotient de deux réels strictement positifs, donc est strictement positif.
     $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{1+2u_n}$.
     On a supposé que $0 < u_n < 1$, ce nombre est donc strictement négatif, donc $u_{n+1} < 1$.
     La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.
   - Par récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n-3u_n} = 3\dfrac{u_n}{1-u_n} = 3v_n$

   La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison 3.

   (b) $v_0 = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = 1$, donc $v_n = v_0 3^n = 3^n$.

   (c) $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n = (1+v_n)u_n$

   Donc $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1} = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

Exercice 4

1. (a) Pour $n = 3$ l'algorithme calcule u_3. Il affiche 1,8340

   (b) Cet algorithme calcule u_n.

2. Soit la proposition $\mathscr{P}_n : 0 < u_n < 2$.
   - $u_0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un entier n.
     Sous cette hypothèse, $\sqrt{2u_n}$ existe et est positif, donc $u_{n+1} > 0$.
     De plus $\sqrt{2u_n} < \sqrt{2\times 2}$ et $\sqrt{2\times 2} = 2$, donc $u_{n+1} < 2$
     Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Par récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

1. (a) Pour tout entier naturel n :

   $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}(u_n+1) = \dfrac{2}{3}v_n$

   (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

(b) $v_0 = u_0 + 1 = 2$

Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

On a bien $u_n = v_n - 1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$.

2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 2\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ termes}})$

Or $\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

donc $S_n = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - (n+1) = -n + 5 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 6

1. • $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

   $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{2}$.
   Ces deux nombres ne sont pas égaux, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

   • $\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$.
   Ces deux nombres ne sont pas égaux, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. (a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

   (b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

   (c) La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (d) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

   (e) $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$

3. (a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$.

   (b) $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$.

   (c) La suite (w_n) est arithmétique de raison 2.
   Pour tout entier n, $w_n = w_0 + 2n = -1 + 2n$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n w_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Soit la proposition $\mathscr{P}_n$: $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

   - $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{3}{2^0} = 2-3 = -1$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un entier n.
     Sous cette hypothèse :
     $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} + \dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$
     $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(2n+3)-(2(n+1)-1)}{2^{n+1}}$
     $S_{n+1} = 2 - \dfrac{4n+6-2n-2+1}{2^{n+1}}$
     $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$
     $S_{n+1} = 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$
     Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Par récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.